ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (20)

1. Одредити решење диференцијалне једначине $y - xy' = 2$, које задовољава услов $y(1) = 2$.
$\left(y(x) = 2\right)$ ***(фебруар 2019.)***

2. Одредити решење диференцијалне једначине $y' + 2xy = 4x,$ које задовољава услов $y(0) = 1$.
$\left(y(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x^2}\right)$ ***(октобар 2018.)***

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$, а затим одредити интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.
$\left(\text{опште решење: } \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + y = c,\ c \in \mathbb{R} \quad \text{интегрална крива: } \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + y = 0\right)$ ***(септембар 2018.)***

4. Написати једну диференцијалну једначину вишег реда чија су партикуларна решења $y_1(x) = 1$ и $y_2(x) = x.$ $\left(y'' = 0\right)$ ***(септембар 2018.)***

5. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

а) $xy' + xy = x$;

б) $y' + y^2 + 3x = 0$;

в) $xy + 7y' = x$;

г) $\sin x + 2x = y'$;

д) ниједна од претходно понуђених једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.

(јул 2018.)

6. Написати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда чија су два линеарно независна партикуларна решења $y_{p_1}(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin x$ и $y_{p_2}(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos x.$
$\left(y'' - 4y' + 5y = 0\right)$ ***(јул 2018.)***

7. Одредити решење диференцијалне једначине $y' + 2xy - 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, које задовољава услов $y(0) = 1$.
$\left(y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(1 + x^2\right)\right)$ ***(јун 2018.)***

8. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' + 2\sqrt{3}y' + 5y = 0.$
$\left(y(x) = c_1\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}\sin\left(\sqrt{2}x\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right)$ ***(фебруар 2018.)***

9. Одредити тип (*раздваја промењиве, хомогена, линеарна, Бернулијева, Рикатијева*) за сваку од следећих диференцијалних једначина првог реда.

а) $y' + e^x y = e^{-x^2}$; (линеарна диференцијална једначина)

б) $x^2 y' - \cos(2y) = 1$; (диференцијална једначина која раздваја промењиве)

в) $x\left(y' - y^2\right) = y\sin x + \cos x$; (Рикатијева диференцијална једначина)

г) $x\left(y' - y\ln x\right) = y^2 \arcsin x + x^2$. (Рикатијева диференцијална једначина) ***(октобар 2017.)***

10. Написати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда чија су два линеарно независна партикуларна решења $y_{p_1}(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ и $y_{p_2}(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}\cos\left(x\sqrt{2}\right)$.

$\left(y'' + 2\sqrt{3}y' + 5y = 0\right)$ ***(октобар 2017.)***

11. Одредити тип (*раздваја променљиве, хомогена, линеарна, Бернулијева, Рикатијева*) за сваку од следећих диференцијалних једначина првог реда.

а) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$; (хомогена диференцијална једначина)

б) $y'(1 - \sin x\cos x) + y^2\cos x - y + \sin x = 0$; (Рикатијева диференцијална једначина)

в) $x\left(1 - x^2\right)y' + \left(2x^2 - 1\right)y - x^3y^3 = 0$. (Бернулијева диференцијална једначина) ***(септембар 2017.)***

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' - 4y' + 8y = 0$.

$\left(y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x}\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^{2x}\sin(2x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2017.)***

13. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' + \dfrac{1}{xy} = 0$.

$\left(\dfrac{y^2}{2} + \ln|x| = c,\ c \in \mathbb{R}\right)$ ***(јул 2017.)***

14. Заокружити слова испред хомогених линеарних диференцијалних једначина другог реда:

а) $y' + 2y = 0$;

б) $y'' = x^2y$;

в) $y = y'' - y' + 3$;

г) $y = y'' - x$;

д) $y - y'' = y' + 2y$;

ђ) ниједна од претходно понуђених једначина није хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда. ***(јул 2017.)***

15. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

а) $y' = 2xy + y^2$;

б) $y^2y' + \cos x = 0$;

в) $8y' + y\,\mathrm{tg}\,x = e^x$;

г) $y + 2xy' - 3x^2y'' = 0$;

д) $y' = y\ln x + \mathrm{ctg}\,x$;

ђ) ниједна од претходно понуђених једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.

(јун 2017.)

16. Одредити опште решење диференцијалне једначине петог реда $y^{(5)} = 0$.

$\left(y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4,\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}\right)$ ***(јун 2017.)***

17. Одредити решење диференцијалне једначине $xy' = x + y$, које задовољава услов $y(1) = 0$.

$\left(y(x) = x\ln|x|\right)$ ***(фебруар 2017.)***

18. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$

$\left(y(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x,\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right)$ ***(фебруар 2017.)***

19. Одредити интегралну криву диференцијалне једначине $y' + 2xy = 4x$ која пролази кроз тачку $A(0,3)$. $\left(y(x) = 2 + e^{-x^2} \right)$ ***(октобар 2016.)***

20. Заокружити слова испред тврђења која важе за диференцијалну једначину

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

а) дата једначина је Бернулијева диференцијална једначина;

б) дата једначина је Рикатијева диференцијална једначина;

в) ако је $P(x) \equiv 0$, дата једначина је линеарна диференцијална једначина;

г) ако је $R(x) \equiv 0$, дата једначина је линеарна диференцијална једначина;

д) ниједно од претходно понуђених тврђења не важи. ***(октобар 2016.)***

2. ИСПИТНИ ЗАДАЦИ (23)

1. **[8]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0,$ ако је познато да је једно партикуларно решење $y_1(x) = \cos x.$

$$\left(y(x) = \frac{2 - \sin(2x)}{c + 2\sin x} + \cos x,\, c \in \mathbb{R} \right)$$ ***(јануар 2019.)***

2. **[8]** У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$, одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' - a^2 y = e^x.$

$\left(a = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x + e^x,\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right)$

$$\left(a \in \{-1, 1\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{x}{2} e^x,\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right)$$

$$\left(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + \frac{e^x}{1 - a^2},\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right)$$ ***(октобар 2018.)***

3. **[9]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0.$

$\left((y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = c,\, c \in \mathbb{R} \right)$ ***(септембар 2018.)***

4. **[9]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' + 2y' + y = (x + 2)\ln x + 2 + \frac{1}{x}.$

$\left(y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x \ln x,\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right)$ ***(јун 2018.)***

5. **[8]** У зависности од параметра $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одредити опште решење диференцијалне једначине $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos(ax).$

$$\left(a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x + \frac{1}{\left(a^2 - 1\right)^2} \cos(ax),\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right)$$

$$\left(a \in \{1, -1\} \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \cos x,\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right)$$

(јун 2018.)

6. [5+4] Дата је диференцијална једначина $x^2y''+2x(x+2)y'+2\left(2x+1+\frac{x^2}{2}\right)y=0.$

а) Одредити вредност параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ за коју се дата диференцијална једначина увођењем смене $y(x)=x^\alpha u(x)$ своди на диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима по функцији u. $(\alpha=-2)$

б) Наћи партикуларно решење y_p дате диференцијалне једначине тако да график функције $f(x)=y_p(x)e^x x^3$ буде парабола чије је теме тачка $(-1,-1)$.

$\left(y_p(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}(2+x),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$ ***(фебруар 2018.)***

7. [9] Методом варијације константи одредити партикуларно решење y_p линеарне диференцијалне једначине другог реда $y''-6y'+9y=\frac{3\mathrm{e}^{3x}}{x^2}$, која се добија из општег за нулте вредности неодређених константи. $\left(y_p(x)=-3\mathrm{e}^{3x}\left(\ln|x|+1\right)\right)$ ***(октобар 2017.)***

8. [5+3] Дата је диференцијална једначина $\left(x^2y^2-1\right)dy+2xy^3dx=0.$

а) Одредити вредност параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ тако да се дата диференцијална једначина увођењем смене $y(x)=z(x)^\alpha$ своди на хомогену диференцијалну једначину по непознатој функцији z. $(\alpha=-1)$

б) Одредити опште решење тако добијене диференцијалне једначине по непознатој функцији z.

$\left(\frac{z}{z^2+x^2}=c,\ c\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2017.)***

9. [10] Дата је диференцијална једначина $y''+8y'+25y=2\cos x.$

а) Одредити решење диференцијалне једначине за које важи $y(0)=y'(0)=0.$

$\left(y(x)=-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-4x}\cos(3x)-\frac{13}{120}\mathrm{e}^{-4x}\sin(3x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x\right)$

б) Одредити позитивне константе a и b тако да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y(x)-a\cos(x-b)\right)=0.$

$\left(a=\frac{\sqrt{10}}{40},\ b=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+2k\pi,\ k\in\mathbb{N}_0\right)$ ***(јул 2017.)***

10. [8] Дата је диференцијална једначина $\left(\frac{y^2}{x}-x^3\right)dx-ydy=0.$

а) Одредити опште решење диференцијалне једначине. $\left(y^2=x^2\left(c-x^2\right),\ c\in\mathbb{R}\right)$

б) Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине које испуњава услов $y\left(\sqrt{3}\right)=3$.

$\left(y^2=x^2\left(6-x^2\right)\right)$ ***(јун 2017.)***

11. [8+2] ***а)*** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'=\frac{1}{1-x^3}y^2-\frac{x^2}{1-x^3}y-\frac{2x}{1-x^3}$, ако је познато да је $y_1(x)=ax^2$ једно њено партикуларно решење.

$\left(a=-1;\ y=-\frac{1-x^3}{c+x}-x^2=-\frac{cx^2+1}{c+x},\ c\in\mathbb{R}\right)$

б) За коју вредност константе c, опште решење постаје добијено партикуларно решење y_1.
(c је бесконачно) ***(фебруар 2017.)***

***12.* [8]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''+y'=7(4+3x)\sqrt[3]{x}$.

$\left(y(x)=c_1+c_2e^{-x}+9x^{7/3},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(октобар 2016.)***

13. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y''-2y'-3y=xe^{2x}$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)\mathrm{e}^{2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(септембар 2014.)***

14. Одредити ону интегралну криву диференцијалне једначине другог реда $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^{x}+8\mathrm{e}^{2x}$ која пролази кроз координатни почетак под углом од $\pi/4$ према $y-$оси.

$\left(y(x)=\mathrm{e}^{x}\left(x-\frac{8}{3}\right)+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{2x} \right)$ ***(фебруар 2014.)***

15. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'(x^2y^3+xy)=1$. Затим наћи ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(1,0)$.

$\left(x=\left(c\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2\right)^{-1},\ c\in\mathbb{R};\quad y=\left(-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2\right)^{-1} \right)$ ***(октобар 2013.)***

16. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-3y'+2y=e^{3x}+e^{x}+x^2$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{\mathrm{e}^{3x}}{2}-x\mathrm{e}^{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(септембар 2013.)***

17. [12] Дата је диференцијална једначина $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$. Одредити опште решење дате једначине ако се зна да је једно партикуларно решење одговарајуће хомогене једначине линеарна функција. $\left(y=C_1x+C_2\ln x-\frac{\ln x}{2x}+\frac{1}{4x} \right)$ ***(април 2013.)***

18. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$, а затим одредити интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,1)$.

$\left(\text{опште решење: } y=\left(\mathrm{e}^{-x^2}(c+2x)\right)^{-1/2},\ c\in\mathbb{R};\quad \text{интегрална крива: } y=\left(\mathrm{e}^{-x^2}(1+2x)\right)^{-1/2} \right)$

(септембар 2012.)

19. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\right)-1+\mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(јун 2012.)***

20. У диференцијалној једначини $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ увести смену $y(x)=a(x)z(x)$, $a(x)\neq 0$, тако да се анулира коефицијент уз z', а затим одредити опште решење полазне диференцијалне једначине.

$\left(y(x)=\frac{c_1\cos x+c_2\sin x}{x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(фебруар 2012.)***

***21.* [12]** У зависности од параметра $a\in\mathbb{R}$, одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-(2a-3)y'+\left(a^2-3a+2\right)y=xe^{x}$.

$\left(a=2\Rightarrow y(x)=c_1+c_2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$

$\left(a=3\Rightarrow y(x)=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$

$\left(a\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\}\Rightarrow y(x)=c_1\mathrm{e}^{(a-1)x}+c_2\mathrm{e}^{(a-2)x}+\frac{xe^{x}}{(a-2)(a-3)}+\frac{(2a-5)e^{x}}{(a-2)^2(a-3)^2},\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \right)$ ***(април 2009.)***

22. Дата је диференцијална једначина $y'' + y' + y = \cos x$.

а) Одредити њено опште решење. $\left(y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin x, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right)$

б) Одредити оно партикуларно решење које задовољава почетне услове $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$\left(y(x) = \sin x \right)$ ***(новембар 2008.)***

23. Одредити опште решење диференцијалне једначине $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

$\left(e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = c, c \in \mathbb{R} \right)$ ***(септембар 2008.)***